

MATEMATICĂ

– OLIMPIADE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE –

CLASA A V-A

Editura SITECH

Craiova, 2021

ENUNȚURI

1. NUMERE NATURALE. OPERATII CU NUMERE NATURALE. FACTOR COMUN

1.1 Diferența a două numere naturale este 2002. Dacă micșorăm descăzutul cu 202 și mărim scăzătorul cu 22, cât este diferența?

(Olimpiada locală, Hunedoara, 2002)

1.2 Calculați $2m+4n+2p$, știind că $m+n=15$ și $n+p=45$.

(Olimpiada locală, Dâmbovița, 1996)

1.3 Suma a trei numere naturale este 324. Dacă din fiecare se scade același număr, atunci obținem numerele: 18, 71 și 145. Care sunt numerele?

(Olimpiada locală, Bihor, 1999)

1.4 Calculați: **a)** $4999 \cdot 1995 + 1994 \cdot 4999 - 3988 \cdot 4999$;

b) $(4+8+12+\dots+204):(2+4+6+\dots+102)$.

(Olimpiada locală, Dâmbovița, 2002)

1.5 a) Scrieți numărul $n=997 \cdot 1996 + 998 \cdot 1996 + 1995$ ca produs de două numere naturale impare consecutive.

b) Determinați patru numere naturale pare consecutive a căror sumă este egală cu 1996.

(Olimpiada locală, Mehedinți, 1996)

1.6 Calculați: **a)** $a=2003-2000+1997-1994+\dots+5-2$;

b) $b=(2^8+9^2+5^6+36^2):(4^4+3^4+25^3+6^4)$.

(Olimpiada locală, Olt, 2003)

1.7 Calculați: $(x-y)^{2005}$ dacă $x=(3^3 \cdot 20 + 49 \cdot 2^2 - 7):(3^2)^{3^4} + (1^{2^{3^4}} + 4^{3^{0^5}})$ și $y=2^5 \cdot 7^5 - 14^5 + 5$.

(Olimpiada locală, Caraș Severin, 2005)

1.8 Calculați: $3a+5b+2c$, știind că $a+b=23$ și $4b+4c=24$.

(Olimpiada locală, Mureș, 2005)

1.9 Aflați $\overline{ab}$, dacă $12+12 \cdot 3+12 \cdot 5+\dots+12 \cdot 23=(\overline{ab}+1)^3$.

(Olimpiada locală, Hunedoara, 2005)

1.10 Să se arate că nu există numere naturale a, b astfel încât $2^a - 4^b = \overline{ab}$.

(Olimpiada locală, Hunedoara, 2006)

1.11 Aflați numărul de forma $\overline{abc}$ ce satisface relația : $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$.

(Olimpiada locală, Satu Mare 2006, Anca Hotea)

1.12 Determinați cifrele a și b , știind că media aritmetică a numerelor $\overline{abba}$, $\overline{aba}$, $\overline{aa}$, $\overline{bb}$ este 1375.

(Olimpiada locală, Vaslui, 2006)

1.13 Aflați numerele naturale x și y , știind că $x^2 \cdot y - 5929 = 13 \cdot x^2$.

(Olimpiada locală, Ialomița)

1.14 Dacă $a + b = 246$ și $c = 28$, calculați : **a)** $ac + bc$; **b)** $7a + 5b + 2(b - c)$.

(Olimpiada locală, Tulcea, 2008)

1.15 Cifrele unui număr natural de trei cifre de forma $\overline{abc}$ verifică relația : $49a + 7b + c = 286$. Să se afle numărul $\overline{abc}$.

(Olimpiada locală, Vaslui, 2008 Gm 10/2007)

1.16 Să se determine numerele naturale a, b, c , știind că $5a + 3b = 57$, $ac = 72$ și $bc = 108$.

(Olimpiada locală, Bacau, 2009, Eugeniu Blăjnut)

1.17 Suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 26. Calculați suma cifrelor numărului : $\overline{abc} + 1$.

(Olimpiada locală, Dolj, 2009)

1.18 Demonstrați că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2009 dau câtul și restul egale, se poate scrie ca produs de trei numere consecutive.

(Olimpiada locală, Teleorman, 2009)

1.19 Determinați numerele naturale a și b , știind că : $a^2 = 2069 + 2^b + a$.

(Olimpiada Județeană, Bistrița Năsăud, 2010, G.m.10/2009)

1.20 Determinați numerele naturale nenule a, b, c astfel încât $a(b+c) = 2009$; $b(a+c) = 2010$; $c(a+b) = 2011$.

Olimpiada județeană Alba 2011)

1.21 Să se afle trei numere naturale a, b, c astfel încât : $a \cdot b = 144$, $b \cdot c = 240$, $a \cdot c = 60$.

(Olimpiada județeană, Argeș, 2011)

1.22 Să se scrie numărul $n = (2001^3 - 2001^2) + (2001^2 - 2001)$ ca produs de trei numere naturale consecutive.

(Olimpiada județeană, Timiș, 2011).

1.23 Determinați numărul $\overline{xy}$ dacă $3^{5 \cdot \overline{xy}} = 3^{6 \cdot \overline{yx}}$.

(Olimpiada locală, Bihor, 2012)

1.24 Determinați numărul $\overline{abc}$ care verifică $\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + a + b + c$.

(Olimpiada locală, Giurgiu, 2012, Gm)

1.25 Calculați : **a)** $2012 + 2013 \cdot 2012 - 2014 \cdot 2011$; **b)** $3 + 5 + 7 + \dots + 2013 - 2 - 4 - 6 - \dots - 2012$;

c) $[(2^8)^3 : 2^5(2^8 + 2^8) + 4 - 4^8 : 2^{14}] : 2^{27} + 9$.

(Olimpiada locală, Galați, 2013, Romeo Zamfir)

1.26 Fie numerele $a = 503 \cdot [2013^0 \cdot (4 + 4 \cdot 5^2) - (1212 : 12 - 1)] + 1$ și $b = 2015 \cdot 1009 + 2015 \cdot 1004 - 2013 \cdot 2$.

a) Calculați numerele a și b

b) Verificați egalitatea $a^2 = b$.

(Olimpiada locală, Satu Mare, 2013, Natalia Danci)

1.27 Calculați diferența dintre suma numerelor naturale de trei cifre identice și suma numerelor naturale de două cifre identice.

(Olimpiada locală, Arad, 2014)

1.28 Aflați numerele naturale a și b astfel încât : $(a+b) \cdot (a-b-1) = 2014$.

(Olimpiada locală, Ialomița, 2014)

1.29 Calculați : $a = (11^{57} + 11^{56} - 11^{55}) : (11^{55} + 11^{54} - 11^{53}) + 169 : [13^6 \cdot 13^5 : (13^2)^5]$

(Olimpiada locală, Vaslui, 2014)

1.30 Determinați numerele naturale care, adunate cu suma propriilor cifre, dau rezultatul 2015.

(Olimpiada locală, București, 2015)

1.31 Calculați : $[9^{108} : (3^2)^{100} + 5^{23} \cdot 5^9] : (25^4 \cdot 125^3 + 27^4 \cdot 81)$

(Olimpiada locală, Gorj, 2016 e.p.)

1.32 Determinați numerele $\overline{abc}$ pentru care : $1 + 2 + 3 + \dots + \overline{ab} = \overline{abc}$.

(Olimpiada locală, Argeș, 2017, G.m. 3/2015)

1.33 Calculați : $a = (7^{2017} + 313 \cdot 7^{2016} - 224 \cdot 7^{2015}) : [2017 - (2016 \cdot 2015 + 2016) : 2016^2]$.

(Olimpiada locală, Tulcea, 2017)

1.34 Se consideră numerele $a = \{[3^{2^5} : (3^5)^6 - 2]^7 + 1\} : (7^{2^5} : 7^{5^2} + 1^{2016^{2017}})$ și $b = 1^{2^{3^4}} + 2^{3^{4^1}} : (4^{3^{2^1}})^4$. Calculați $a \cdot b + a^b + b^a - b : a$.

(Olimpiada locală Timiș 2017)

1.35 Calculați : $16 \cdot 4^{2018} : (4 \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^3} \cdot \dots \cdot 2^{2^{2018}})$

(Olimpiada locală, Cluj, 2018, e.p. Sorin Borodi)

1.36 Calculați valoarea numărului natural $a^2 + b^2 + 3ad - 3ac$, dacă $a = 1^{2018} + 4 + 8 + 12 + 200 - 70^2 - 14^2$; $b = 3^{80} : [3^{50} \cdot 3^{28} + (3^8 \cdot 3^{15})^4 : 3^{14} + (4^{76} : 4^{75} - 1)^{70} \cdot 3^8] + 3^{1^0}$.

(Olimpiada locală, Covasna, 2018)

1.37 Să se calculeze :

a) $2^3 + [(2^3)^7 - (2^7)^3 + 3 \cdot 3^4 - 81] : \{3^2 \cdot [301 - 10 \cdot (24 + 2^{1998} : 2^{1997} \cdot 3)]\}$;

b) $(1111+2222+\dots+9999) : (11+22+\dots+99)$.

(Concursul interjudețean de matematică "Mihai Viteazul ", Sfântul Gheorghe, 4 dec. 1998)

1.38 Calculați : $(1999^2 \cdot 1998^2 - 1998^2 \cdot 1997^2) : (1999 \cdot 1998^2 + 1998^2 \cdot 1997)$.

(Concursul interjudețean de matematică "Memorial Nicolîță Sanda ", Drăgășani, 13 nov. 1999, e.p. Marcel Neferu)

1.39 Calculați : $A = a^2 + 3ab - 3ac + d^2$, știind că $a = 7$, $b - c = 10$ și

$d = [2^{98} \cdot (2^3 \cdot 5)^{102}] : 16 \cdot 5 \cdot 2^{198} \cdot 25^{25})^2 + 3^2 + 11 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2001)^0$.

(Concursul interjudețean de matematică al Școlii "Basarab I ", Curtea de Argeș, 17 dec. 2001)

1.40 Se dau numerele : $x = 3^{39} : (3^3 \cdot 3^{34}) - (3^2 + 3 \cdot 25) : 21$, $y = 25.502 - 255 \cdot 10^2 - 2^2 \cdot 3^2 : 18$.

Calculați : $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$.

(Concursul interjudețean de matematică "Prietenii lui Pitagora ", ediția a VII-a, Baia Mare, 15 - 17 dec. 2001)

1.41 Fie numerele : $a = [(2^3)^2 - 2002^0] : 3^{2^{1^{2002}}} - (1^{3^4} + 2^{2^{1^{2002}}})$ și $b = 81 \cdot 111^4 - 333^4 + 1$. Calculați $(a - b)^{2002}$.

(Concursul interjudețean de matematică "Mihai Viteazul ", ediția a XIII-a, Sfântul Gheorghe, 7 dec. 2002)

1.42 Să se efectueze :

$$\{ \{ \{ [(1 + 2 + 3 + \dots + 1010) : 1010]^{1000} \cdot 5^{1003} : 5^{2002} \}^2 - 1 \} : 2^3 - 3 \} \cdot (243 \cdot 549 \cdot 643)^{2003} + (2002 + 0)^0 \cdot 10.$$

(Concursul "Simon Petru", ediția a III-a, 10 ian. 2003)

1.43 Calculați suma cifrelor numărului : $B = 4^{2002} \cdot 5^{4007} + 280.$

(Concursul interjudețean de matematică al revistei "Arhimede", București, 13-14 dec.2003)

1.44 Să se scrie numărul 2003^{2003} ca sumă de 2003 numere consecutive.

(Concursul de matematică "Florica T.Câmpan", Iași, 15 februarie 2004-etapa județeană)

1.45 Scrieți folosind numai numărul 1 de șase ori și operații aritmetice învățate :

a) Numărul 10 ; b) Cel mai mare număr posibil .

(Concursul interjudețean de matematică "Jose Marti", București, 19 martie 2005)

1.46 Să se determine numărul $n = (16a + 13b + 15c - 371)^{2006} - 1$, știind că $4a + 2b = 54$ și $6b + 18c = 198.$

(Concursul "Dumitru Țiganetea", Dej, 7 aprilie 2006, Vasile Șerdan)

1.47 Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ știind că : $8 + 16 + 24 + \dots + \overline{abcd} = \overline{abcd00}.$

(Concursul "Matematica la Pontul Euxin", Mangalia, 2 iunie 2007, Nicolae Jurubiță)

1.48 Aflați $\overline{abcd}$, astfel încât să avem : $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2008.$

(Concursul "Gheorghe Dumitrescu", Craiova, 27. 10. 2007)

1.49 Calculați : a) $(5^{1+2+3+\dots+20} + 4 \cdot 5^{210}) : 5^{211} ;$

b) $(2008^{2008} - 2008^{2007}) : (2008^{2007} - 2008^{2006}).$

(Concursul "Euclid", Pitești, 13.12.2008)

1.50 Aflați cifrele a și b pentru care are loc egalitatea : $\overline{aa \dots a^2} \cdot b = \overline{bb \dots b}^2.$

(Concursul "Urmașii lui Moisi", Iași, 05.04.2009)

1.51 Să se calculeze :

a) $2^2 \cdot \{3^2 + 4 \cdot [25 \cdot 5^3 : 5^4 - (2^2)^3 : 2^5 \cdot (3^3 \cdot 5^2)]\} ;$

b) $[6^{100} \cdot 2^{50} + (3^{17})^{10} + 25^{37}] : [2^{150} \cdot 3^{100} + (9^5)^{17} \cdot 5^{74}].$

(Concursul "Tinere speranțe", Baia Mare, 10.12.2010)

1.52 Numerele naturale a, b și c verifică egalitățile : $a - b = 25$ și $3a + b + 7c = 100$. Calculați :

$$4b + 7c \text{ și } 2a + 2b + 7c.$$

(Concursul "Jose Marti ", București, 22.01.2011)

1.53 Arătați că : **a)** $(2^{60} + 4^{40} + 8^{20}) : (2^{79} + 16^{15}) = 2$; **b)** $(2 + 4 + 6 + \dots + 2012) : 2014 = 503$.

(Concursul "Jose Marti ", Brăila, 01.12.2012)

1.54 Calculați : **a)** $[2^{58} : 2^{28} + (3^4)^5 + 6^{33} : 6^{23}] : [3^{10} \cdot 2^{10} + 2^{13} \cdot 2^{17} + (3^2)^{10}]$;

b) $(10.000 - 1^2) \cdot (10.000 - 2^2) \cdot (10.000 - 3^2) \cdot \dots \cdot (10.000 - 120^2)$.

(Concursul "X-OI ", B[ile Olănești , 11.05.2013)

1.55 a) Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ care au proprietatea că : $\overline{ab} = a + b + a + b^2$;

b) Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ care au proprietatea că : $\overline{ab} = a + b + a + b^3$.

(Concursul "Mathematica – modus vivendi ", Râmnicu Vâlcea , 22 februarie 2014,

Dumitru Acu , Cătălin Pană)

1.56 Calculați suma : $S = 6 + 92 + 988 + \dots + \underbrace{999 \dots 600}_{100 \text{ cifre}}$.

(Concursul "Dumitru Țiganetea ", Dej , 23 mai 2015)

1.57 a) Calculați : $\{[20 + (28 \cdot 6 - 140) : 4] \cdot 5 + 645 : 43\} : [213 \cdot 4 - (8 + 174 : 87) \cdot 80 - 2]$;

b) Fie a,b,c numere naturale astfel încât $2a + 2b + 4c = 68$ și $3a + 2b + 2c = 87$. Calculați diferența $a - 2c$ și produsul $(2a + b)(4a + 3b + 4c)$.

(Concursul "Alexandru Papiu Ilarian ", Tg. Mureș , 28-29 oct.2016)

1.58 Determinați numerele naturale a și b , știind că : $a^2 = 1259 + 2^b + a$.

(Concursul "Euclid ", Iași , 12 mai 2017)

1.59 Dacă se adună cele 99 de numere : $9, 99, 999, \dots, \underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ cifre}}$, câte cifre de 1 va conține rezultatul ?

(Concursul "Traian Lalescu", Timișoara , 23-25 martie 2018)

2. TEOREMA DE ÎMPĂRȚIRE CU REST.

2.1 Determinați restul împărțirii prin 24 a numărului $7^{3^m} + 5^{2^n}$, m, n , numere naturale.

(Olimpiada județeană, Vaslui, 2010)

2.2 Se consideră n numere naturale consecutive. Suma resturilor împărțirii celor n numere la 7 este 156. Aflați valorile posibile ale lui n .

(Olimpiada locală, Brașov, 2011)

2.3 Să se arate că numărul $n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1997}$ împărțit la 7 și 31, dă același rest.

(Olimpiada locală, Olt, 1997)

2.4 Determinați toate numerele naturale care împărțite la 36 dau ca rest pătratul câțului.

(Olimpiada locală, Sibiu, 1996)

2.5 Aflați restul împărțirii numărului $n = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1997$ la 1998.

(Olimpiada locală, Vâlcea, 1998).

2.6 La o împărțire de două numere naturale se știe că deîmpărțitul este 39 iar restul 1. Aflați împărțitorul și câțul, știind că sunt diferite de 1 și că împărțitorul este mai mare decât câțul.

(Olimpiada locală, Constanța, 1985)

2.7 Să se arate că $10^{25} - 7$ se divide cu trei.

(Olimpiada locală)

2.8 Numărul natural n dă restul 3 la împărțirea prin 5 și restul 4 la împărțirea prin 7. Ce rest dă n la împărțirea prin 35?

(Olimpiada mun. 2007)

2.9 Aflați câțul împărțirii numărului x la 5, dacă $x = 2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 19$.

(Olimpiada mun. 2007 M. Fleanu)

2.10 Arătați că numărul $\overline{abcde} - 3(\overline{abcd} - 2e)$ se împarte exact la 7.

(Olimpiada locală, Caraș Severin, 2002)

2.11 Arătați că numărul $n = \overline{abcde} - (\overline{abc} - 98\overline{de})$ se divide cu 99.

(M. Popescu)

2.12 Aflați restul împărțirii numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2005 + 5000$ la 200 (Olimpiada locală, Alba, 2003)

2.13 Determinați restul împărțirii la 5 a numărului $B = 1996^{2001} + 1992^{2001} + 1997^{2004}$.

(Olimpiada locală, Dâmbovița, 2001)

2.14 Arătați că numerele $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2003}$ și $B = 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{4006}$ dau același rest prin împărțirea la 7.

(Olimpiada locală, Olt, 2003)

2.15 Să se calculeze suma numerelor naturale care împărțite la 2005 dau câtul 1002.

(Olimpiada județeană, Argeș, 2005)

2.16 Demonstrați că numerele naturale nenule n și $2003 \cdot n$ dau același rest prin împărțirea la 11.

(Olimpiada locală Dâmbovița 2005)

2.17 Demonstrați că dacă numărul $\overline{abcab}$ dă restul 9 la împărțirea cu 91, atunci cel puțin o cifră a sa este egală cu 1.

(Olimpiada județeană, Tulcea, 2005)

2.18 Un număr natural n , dă restul 4 la împărțirea prin 7 și restul 5 la împărțirea prin 9. Aflați restul împărțirii numărului n prin 63.

(Olimpiada județeană, Argeș, 2010, G.m. 11/2009)

2.19 Să se determine câtul și restul împărțirii numărului $5n+8$ la numărul $n+1$, n număr natural nenul.

(Olimpiada județeană, Galați, 2011, Dana Radu)

2.20 Determinați numărul $\overline{xyzt}$, număr scris în baza 10, știind că împărțind acest număr la numărul $\overline{yzt}$ obținem câtul $x+1$ și restul $x+2$.

(Olimpiada județeană, Tulcea, 2011, G.m.)

2.21 Suma a patru numere este 999. O treime din al treilea număr este egală cu o pătrime din al patrulea. Primul împărțit la al treilea dă câtul și restul 3, iar al doilea împărțit la al patrulea dă câtul și restul 4. Aflați cele două numere.

(Olimpiada locală, Arad, 2012)

2.22 Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, care împărțite la 36 dau restul un pătrat perfect.

(Olimpiada locală, Constanța, 2012, G. m.)

2.23 Aflați câtul și restul împărțirii lui $3 \cdot 2^{2009}$ la $5 \cdot 2^{2007}$.

(Olimpiada locală, Dolj, 2012)